3.5.23 Lineární nerovnice III

Předpoklady: 030522

Př. 1: Na co musíme dávat pozor při řešení nerovnic pomocí ekvivalentních úprav?

Při násobení a dělení zápornými čísly musíme obrátit znaménko nerovnosti.

Př. 2: Vyřeš nerovnice.

a) $x+2\geq 0$ b) $1-3x\leq 7$ c) $2(x+2)>3(2-x)+5x$ d) $\frac{3x+1}{2}+1>\frac{3}{4}$

a) $x+2\geq 0 \quad /-2$

$x\geq -2$

$K=\langle -2;\infty)$

b) $1-3x\leq 7 \quad /-1$

$-3x\leq 6 \quad /:(-3)$

$x\geq -2$

$K=\langle -2;\infty)$

c) $2(x+2)>3(2-x)+5x$

$2x+4>6-3x+5x$

$2x+4>6+2x \quad /-2x$

$4>6$ - nerovnost neplatí $\Rightarrow$ nerovnice nemá řešení: $K=\emptyset$.

d) $\frac{3x+1}{2}+1>\frac{3}{4} \quad /\cdot 4$

$2(3x+1)+4>3$

$6x+2+4>3$

$6x+6>3 \quad /-6$

$6x>-3 \quad /:6$

$x>\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}$ $\qquad K=\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$

Př. 3: Vyřeš nerovnice.

a) $2(1-x)<3-(x+1)-x$ b) $2x+2\leq 5+2(x-1)$ c) $2-x>2x-3(x-1)$

a) $2(1-x)<3-(x+1)-x$

$2-2x<3-x-1-x$

$2-2x<2-2x \quad /+2x$

$2<2$ Obě strany nerovnosti jsou stejné $\Rightarrow$ nevyhovují zadání $\Rightarrow$ $K=\emptyset$.

b) $2x+2 \le 5+2(x-1)$

$2x+2 \le 5+2x-2$

$2x+2 \le 3+2x \quad / -2x$

$2 \le 3 \quad / -2$

$0 \le 1$ Nerovnost bude splněna pro libovolné číslo (je to zřejmé už dvě řádky) $\Rightarrow K = R$.

c) $2-x > 2x-3(x-1)$

$2-x > 2x-3x+3$

$2-x > -x+3 \quad / +x$

$2 > 3$ Nerovnost není splněna pro žádné číslo x (zřejmé už z předchozího řádku) $\Rightarrow K = \emptyset$.

Př. 4: Rozhodni, pro která reálná čísla a je výraz $\frac{2a+3}{4}$:

a) kladný, b) záporný, c) větší než 2, d) menší než $-\frac{2}{3}$.

a) kladný
Výraz je kladný, když je větší než nula $\Rightarrow$ zapíšeme podmínku jako nerovnici:

$\frac{2a+3}{4} > 0 \quad / \cdot 4$

$2a+3 > 0 \quad / -3$

$2a > -3 \quad / : 2$

$a > -\frac{3}{2}$

Výraz $\frac{2a+3}{4}$ je kladný, pokud za proměnou a dosadíme čísla větší než $-\frac{3}{2}$: $a \in \left(-\frac{3}{2}; \infty\right)$.

b) záporný
Výraz je záporný, když je menší než nula $\Rightarrow$ zapíšeme podmínku jako nerovnici:

$\frac{2a+3}{4} < 0 \quad / \cdot 4$

$2a+3 < 0 \quad / -3$

$2a < -3 \quad / : 2$

$a < -\frac{3}{2}$

Výraz $\frac{2a+3}{4}$ je záporný, pokud za proměnou a dosadíme čísla menší než $-\frac{3}{2}$:
$a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. Výsledek byl zřejmý od vyřešení předchozího příkladu.

c) větší než 2
Zapíšeme podmínku jako nerovnici:

$\frac{2a+3}{4} > 2 \quad / \cdot 4$

$2a+3 > 8 \quad / -3$

$2a > 5 \quad / : 2$

$a > \frac{5}{2}$

Výraz $\frac{2a+3}{4}$ je větší než 2, pokud za proměnou a dosadíme čísla větší než $\frac{5}{2}$: $a \in \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$.

d) menší než $-\frac{2}{3}$

Zapíšeme podmínku jako nerovnici:

$\frac{2a+3}{4} < -\frac{2}{3} \quad / \cdot 12$

$3(2a+3) < -8$

$6a + 9 < -8 \quad / -9$

$6a < -17 \quad / : 6$

$a < -\frac{17}{6}$

Výraz $\frac{2a+3}{4}$ je menší než $-\frac{2}{3}$, pokud za proměnou a dosadíme čísla menší než $-\frac{17}{6}$: $a \in \left(-\infty; -\frac{17}{6}\right)$.

Př. 5: Zjisti, zda číslo $-\sqrt{15}$ patří mezi řešení nerovnice $x - (3x - 3) \geq x + 17$.

Mohli bychom do nerovnice dosadit, ale výpočty s $-\sqrt{15}$ jsou obtížně $\Rightarrow$ vyřešíme nerovnici a pak snadno rozhodneme, zda $-\sqrt{15}$ patří mezi řešení.

$x - 3x + 3 \geq x + 17$

$-2x + 3 \geq x + 17 \quad / -x$

$-3x + 3 \geq 17 \quad / -3$

$-3x \geq 14 \quad / : (-3)$

$x \leq -\frac{14}{3} \qquad K = \left(-\infty; -\frac{14}{3}\right\rangle$

Musíme porovnat čísla $-\sqrt{15}$ a $-\frac{14}{3}$:

- $-\sqrt{15}$ je větší než -4 (protože $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$),
- $-\frac{14}{3} = -4,\overline{6}$.

Platí $-\sqrt{15} > -\frac{14}{3} \Rightarrow$ číslo $-\sqrt{15}$ nepatří mezi řešení nerovnice $x - (3x - 3) \geq x + 17$.

Př. 6: Zjisti, zda číslo $\sqrt{9}$ patří mezi řešení nerovnice $3x + 2(1 - x) \geq 2x - 4$.

Platí $\sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ číslo 3 můžeme snadno dosadit do nerovnice.

$3 \cdot 3 + 2(1-3) \geq 2 \cdot 3 - 4$

$9 + 2 \cdot (-2) \geq 6 - 4$

$5 \geq 2 \Rightarrow$ číslo $\sqrt{9}$ patří mezi řešení nerovnice $3x + 2(1-x) \geq 2x - 4$.

Př. 7: Rozhodni, zda všechna řešení nerovnice $\frac{2x-1}{3} < \frac{3-2x}{2}$ leží v intervalu $(-\infty;1)$.

Nerovnici vyřešíme.

$\frac{2x-1}{3} < \frac{3-2x}{2} \quad / \cdot 6$

$2(2x-1) < 3(3-2x)$

$4x - 2 < 9 - 6x \quad / + 6x$

$10x - 2 < 9 \quad / + 2$

$10x < 11 \quad / : 10$

$x < \frac{11}{10} \qquad K = \left(-\infty; \frac{11}{10}\right)$

Všechna řešení nerovnice $\frac{2x-1}{3} < \frac{3-2x}{2}$ v intervalu $(-\infty;1)$ neleží, protože platí $\frac{11}{10} > 1$.

Shrnutí: Některé podmínky můžeme přepsat jako nerovnice a ty pak snadno vyřešit.